(1) (a) (i) zvolme $\varepsilon>0$ a dělení $D\in\mathcal{D}([-4,4])$, aby

$S(f,D)-s(f,D)<\varepsilon$. Nechť D' je zjemnění D vzniklé přidáním dělicího bodu -3 do D (pokud tam není). Nechť $D_1\in\mathcal{D}([-4,-3])$, resp. $D_2\in\mathcal{D}([-3,4])$, je dělení obsahující dělicí body D' v intervalu $[-4,-3]$, resp. $[-3,4]$. Potom

$$0\leq S(f,D_2)-s(f,D_2)\leq S(f,D_1)-s(f,D_1)+S(f,D_2)-s(f,D_2)$$
$$=S(f,D')-s(f,D')\leq S(f,D)-s(f,D)<\varepsilon,$$

což nám stačí.

(ii) volme $\varepsilon>0$ a $D\in\mathcal{D}([-4,4])$, ať $S(f,D)-s(f,D)<\varepsilon$

Volme interval $I=[x_k,x_{k+1}]$ z dělení D.

Potom platí

$$(*)\quad \sup_I|f|-\inf_I|f|\leq\sup_I f-\inf_I f.$$

To nahlédneme snadno např. rozebráním případů

$$0\leq\inf_I f\leq\sup_I f\implies\sup_I|f|=\sup_I f \text{ a } \inf_I |f|=\inf_I f$$

$$0\leq-\sup_I f\leq-\inf_I f\implies\sup_I|f|=-\inf_I f \text{ a } \inf_I|f|=-\sup_I f$$

$$0 \le \sup_I f \le -\inf_I f \Rightarrow \sup_I |f| = -\inf_I f \text{ a } \inf_I |f| \ge 0$$

$$0 \le -\inf_I f \le \sup_I f \Rightarrow \sup_I |f| = \sup_I f \text{ a } \inf_I |f| \ge 0$$

Ve všech případech (*) snadno vyplyne.

Protože (*) platí pro libovolný interval $[x_k, x_{k+1}]$ dostáváme

$$S(|f|, D) - s(|f|, D) \le S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon,$$ což stačí.

(2) (e) (i)

neplatí stačí zvolit $f(x) = -16 + x^5 - x^6$.

Potom $|f^{(6)}(x)| = |-6!| = 6! \leq 1000$, $x \in \mathbb{R}$,

ale $f(x) \leq -16 + x^5 < 0 \quad x \in [0,1)$,

$f(1) = -16 < 0$,

$f(x) \leq x^5 - x^6 < 0 \quad x \in (1,2]$,

a tedy $f < 0$ na $[0,2]$.

(ii) Platí, použijeme Lagrangeův tvar zbytku, ten dává (pro $T(x) = T^{f}_{1,0}(x) = -16 + x^5$)

$$|f(2) - T(2)| \leq \sup_{[0,2]} |f| \cdot \frac{2^6}{6!} < 1.$$

Rovněž $f(0) = T(0) = -16$ a $T(2) = 16$

Tedy $f(0) < 0 < f(2)$. Protože f' existuje na $\mathbb{R}$ vlastní, platí, že f je spojitá na $[0,2]$ a tedy podle Darbouxovy věty (pro $C([a,b])$) existuje $x \in (0,2)$, že $f(x) = 0$.

(3) (d) (i) neplatí, stačí zvolit $f = -2$, $g = \operatorname{sgn}(x-1)$ a $h = 2$.

(ii) platí, máme

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = g(1) = h(1) = \lim_{x\to 1} h(x)$$

a $f \leq g \leq h$ na $P(1,1)$.

Podle věty o dvou strážnících tedy platí

$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$ a tedy f je spojitá v bodě 1.

(iii) neplatí, např. pro $\varphi(x) = \operatorname{sgn}(x-1)$ a $f(x) = 7$

(iv) platí, pro $x \in P(1,1)$ máme

$$-7 f(x) \leq \varphi(x) \cdot f(x) \leq 7 f(x).$$

Protože $\lim_{x\to 1} -7 f(x) = \lim_{x\to 1} 7 f(x) = 0$ platí

podle věty o dvou strážnících i

$\lim_{x\to 1} \varphi(x) \cdot f(x) = 0 = \varphi(0) \cdot f(0)$, a tedy $\varphi \cdot f$ je spojitá v 1.